The Society for Economic Studies

The University of Kitakyushu

Working Paper Series No.2011-4

(accepted in 15/07/2011)

『非ワルラス的アプローチ』に基づくマクロ経済理論

——ケインズ経済学の真のミクロ的基礎付けを目指して——

第３章　*AD-AS* モデルとその応用 I

田中淳平 *

北九州市立大学

＜目次＞

* E-mail: j-tanaka@kitakyu-u.ac.jp

第 3 章　*AD-AS* モデルとその応用 I

第 1 章の 45 度線モデルや第 2 章の *IS-LM* モデルでは財市場における名目価格（＝物価）と労働市場における名目賃金が共に外生的・固定的と想定されていたが、本章では財市場に独占的競争の想定を導入することで、名目賃金のみが外生的・固定的で、財の名目価格はその生産量と同時に内生的に決定されるようなモデル――いわゆる *AD-AS* モデル――を提示し、その基本的特性を論じると共に（前章までと同様の手順で）財政政策の世代間厚生効果を詳しく検討する。

不完全競争を考慮したマクロ一般均衡モデルを構築するという試みは 1980 年代後半から 1990 年代にかけてニューケインジアンと呼ばれるグループによって行われていたが、それらは基本的にマクロ経済学の『ワルラス的アプローチ』を受け入れる形で展開された [1]ため、『非ワルラス的アプローチ』に基づいてマクロ経済理論の体系化し直すという本書の視点とは微妙に乖離した内容になっている。より具体的には、ニューケインジアンの議論は価格変数の固定性をなるべく想定することなくケインズ的均衡を市場の失敗の帰結として導くことを重視する傾向が強かったため、「名目賃金が固定的であるような独占的競争モデルの基本的特性はどのようなものか」という問いの立て方自体を忌避していた側面がある。本章では、『非ワルラス的アプローチ』の立場からそうした問いに直接的に答えられるような単純なモデルを提示し、その特性を調べることを目的とする。

以下では、まず、3.1 節において本章の基本モデルである独占的競争型の非ワルラスモデルを提示してその基本的特性を明らかにし、次に 3.2 節において基本モデルを世代重複モデルへと拡張し、無駄な政府支出やその財源調達方法の選択が各世代の経済厚生にいかなる影響を及ぼすかを明らかにする。

３．１　*AD-AS* モデルの非ワルラス的表現

[1] この点については田中（2010）の第 1 章を参照せよ。

この節では第 1 章の標準的な非ワルラスモデルに財市場における独占的競争の設定を導入することで *AD-AS* モデルを一般均衡論的に表現し、その基本構造を詳しく検討する。

以下で提示されるモデルは家計部門と企業部門から構成され、消費財、労働サービスおよび貨幣が取引される静学モデルであるが、標準的な非ワルラスモデルとの違いは、ここでは n 種類の差別化された消費財が存在し、第 i 消費財（$i = 1,2,\cdots,n$）の価格と生産量はそれを独占的に供給する第 i 企業の利潤最大化行動によって内生的に決定されるという点である。したがって、以下のモデルでは名目賃金のみが外生的・固定的で、家計はその固定賃金の下、各独占企業の有効労働需要を制約として受け入れた上で自らの需要計画を再決定する一方、各独占企業は（非ワルラス的な意味での）財需要制約には直面せず、通常の独占企業と同様の利潤最大化行動をとることとなる（名目賃金がどのような領域に存在する場合にこうしたケインズ的失業の局面が成立するかについては本章の付録 A を参照せよ）。なお、本章では既存産業（＝既存の種類の消費財生産の分野）への企業の新規参入や新しい種類の財の開発といった問題は捨象して議論を進めることにする。

家計の効用最大化

家計の効用最大化問題は次のように定式化できる。

$$\max_{c_i, M_d} \quad U = \alpha \log C + (1-\alpha) \log\left(\frac{M_d}{P}\right) \qquad \left(C \equiv n\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i c_i + M_d = \sum_{i=1}^{n} (\overline{W} l_i^d + \Pi_i) + \overline{M} \qquad (l_i^d \text{ ：所与})$$

ここで、c_i は第 i 財の消費量、p_i は第 i 財の名目価格、P は各財の名目価格を集計した物価指数、$\overline{M}$ は名目貨幣量、M_d は名目貨幣需要、$\overline{W}$ は名目賃金（固定的）、l_i^d は第 i 企業の有効労働需要、Π_i は第 i 企業の名目利潤である。Dixit and Stigliz（1977）に従い、家計

は$C \equiv n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1}$と定義された指標（sub-utility）に基づいて各財の消費からの効用を得るものとする（この関数形は CES 型と呼ばれる。この関数形の数学的特性については本章の付録 B を参照せよ)。この指標内に現れるηは各財の代替の弾力性（＝財iと財jの相対価格が 1%変化したとき、その消費比率が何%変化するか）を示すパラメーターであり、ηが大きいほど代替の弾力性が大きいことを意味する。ゆえに、このηを無限大へと近づけると各財は完全代替的となり、この場合、各企業の独占力の源泉が失われることで経済は完全競争的な状態へと収束することになる。なお、物価指数Pが各財の名目価格p_iをどのように集計する形で定義されているかについては、すぐ後で説明する。

上の効用最大化問題は以下のように 2 つの段階に分けて解くのが便利である。まず効用最大化の第 1 段階においては、各財への名目消費支出総額Eを所与として指標Cを最大にするような各財の消費量を計算する。

$$(1)\qquad \max_{c_i}\quad C \equiv n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1}\qquad \text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}p_i c_i = E$$

この問題の数学的解法の詳細とその経済学的意味合いについては本章の付録Cを参照せよ。結論のみを述べると、上の問題を解くことで各財への最適消費量c_iを（2）のように、（所与の）消費支出総額Eを（3）のように表現することができる。

$$(2)\qquad c_i = \frac{1}{n}\left(\frac{p_i}{P}\right)^{-\eta}\frac{E}{P}\qquad \left(P \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}\right)$$

$$(3)\qquad PC = E\quad \left(=\sum_{i=1}^{n}p_i c_i\right)$$

これより、最適消費量c_iは実質価格p_i/Pが上昇すると減少し、実質消費支出総額E/Pが上昇すると増加することが分かる。なお、上の問題を解く過程で定義される物価指数Pは厳密には指標Cを 1 単位引き上げるために必要な最小費用を意味しているが、（3）より均衡において各財への支出総額EがPCと一致するので、このCを「理想的な消費バスケッ

ト」の購入量のようにみなしたとき、P はそのバスケットの単位価格（＝すなわち物価指数）に相当する変数であることが分かる。

この第 1 段階の結果をもとに、第 2 段階の問題を以下のように定式化できる。

$$\max_{C, M_d} \quad U \qquad \text{s.t.} \quad PC + M_d = \sum_{i=1}^{n} (\overline{W} l_i^d + \Pi_i) + \overline{M} \qquad (L_d \text{ ：所与})$$

この問題は単一財モデルにおける家計の効用最大化問題と同じであり、その最適計画は以下のようになる。

$$\text{(4)} \qquad PC = \alpha \left[\sum_{i=1}^{n} (\overline{W} l_i^d + \Pi_i) + \overline{M} \right], \quad M_d = (1-\alpha) \left[\sum_{i=1}^{n} (\overline{W} l_i^d + \Pi_i) + \overline{M} \right]$$

企業の利潤最大化

経済には各消費財の種類に応じて n 個の独占企業が存在しているが､各企業は同質的なので、以下では企業 i （＝第 i 財を生産する独占企業）に焦点を当てて議論を進める。

まず、企業 i の生産関数は以下のように与えられる。

$$y_i = A l_i^a \qquad (0 < a \leq 1)$$

ここで、y_i は第 i 財の生産量、l_i は企業 i の労働投入量、A は生産性パラメーターである。企業 i はこの生産技術と第 i 財に対する家計の需要関数（2）を所与として、利潤 Π_i を最大にするような価格 p_i を設定するので、その利潤最大化問題は以下のようになる。

$$\max_{p_i} \quad \Pi_i = p_i y_i - \overline{W} l_i \qquad \text{s.t.} \quad y_i = A l_i^a, \quad y_i \ (= c_i) = \frac{1}{n} \left(\frac{p_i}{P} \right)^{-\eta} \frac{E}{P}$$

ここで、企業 i は利潤最大化に際して物価指数 P を所与と見なす点に注意せよ。これは、独占的競争経済において各企業の規模は経済全体と比較して十分小さく、その結果、p_i の変化は P に無視しうる程度の影響しか与えないからである。

この問題の 1 階の条件から次式を導出できる。

（5）　　（$\dfrac{\partial \Pi_i}{\partial p_i}=0$）　　$p_i^{-\eta+\frac{\eta}{a}+1}=A^{-1/a}\ \dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{\overline{W}}{a}\left(\dfrac{1}{n}\dfrac{E}{P^{1-\eta}}\right)^{(1-a)/a}$

これより、企業iの設定する最適価格p_iは添え字iには依存しない（$p_i=p$）ことが分かるが、さらに各企業の価格を$\left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}$と集計したものが物価指数$P$に他ならないことを考慮すると、結局以下が成立することになる。

（6）　　p_i（$=p$）$=P$

これは、企業iは物価指数Pを所与として最適価格p_iを決定するが、各企業が同質的・対称的であるような想定下ではその最適価格が物価指数そのものと一致することを示している。したがって、各企業の設定する最適価格は（6）を 1 階の条件（5）に代入して価格に関して解き直すことで以下のように求めることができる。

（7）　　p_i（$=P$）$=A^{-1}\left(\dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{W}{a}\right)^{a}\left(\dfrac{E}{n}\right)^{1-a}$

また、（6）を各消費財の需要関数（2）に代入することで、各企業の生産量を以下のように表すことができる。

（8）　　y（$=c$）$=\dfrac{1}{n}\dfrac{E}{P}$（$=\dfrac{1}{n}C$）

市場均衡の導出

　以上で各経済主体の行動を論じ終えたので、この経済の市場均衡を導出しよう。まず、家計の第 2 段階の効用最大化条件（4）から

$$PC=\frac{\alpha}{1-\alpha}M_d$$

が成立するが、これに貨幣市場の均衡条件：$M_d=\overline{M}$および（8）を代入することで以下を得る。

(9) $$y=\frac{1}{n}\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P}$$

これは、基本的には物価Pが与えられた時の家計の各財の需要量（＝各企業の生産量）を示した関係で、いわゆる「*AD* 曲線」に対応する式である。他方、この経済の「*AS* 曲線」、すなわち家計の各財の需要量（＝各企業の生産量）が与えられた時、各企業がどのような最適価格を設定するかは、(7) に (8) を代入して整理することで以下のように求められる。

(10) $$P=A^{-1/a}\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\,y^{(1-a)/a}$$

以上で、このモデルにおける 2 つの内生変数(y,P)に対して 2 本の方程式が揃い、体系が完結した。*AD* 曲線（*AS* 曲線）は横軸に生産量y、縦軸に物価Pを測った平面上において右下がり（右上がり）の曲線になるので、確かにその交点は一意に存在し、それを求めると以下のようになる。

(11) $$P=A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left(\frac{1}{n}\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{M}\right)^{1-a},\quad y=A\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{-a}\left(\frac{1}{n}\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{M}\right)^{a}$$

＜図 3.1：*AD*-*AS* モデル＞

なお、この均衡において各企業の利潤の大きさは

$$\Pi_i=[1-\frac{a(\eta-1)}{\eta}]\times\frac{1}{n}\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{M}>0$$

となり、長期的にはこの値がゼロになるまで財の種類nが増え続けることになるが、このモデルでは常に$1-a(\eta-1)/\eta>0$が成立するので長期的にはnが無限大に増え続けることになる。nが有限の範囲内で長期均衡が成立するためには企業の生産技術を修正する必要があるが、この点については次章で検討する予定である。

ちなみに、このモデルにおいて代替の弾力性ηを無限大へと近づけると各財は完全代替的となり、各企業の価格設定ルールは完全競争下の価格設定ルール：$P=MC$と一致する。この場合、市場均衡における価格と生産量は

$$P = A^{-1}\left(\frac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left(\frac{1}{n}\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{M}\right)^{1-a}, \quad y = A\left(\frac{\overline{W}}{a}\right)^{-a}\left(\frac{1}{n}\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{M}\right)^{a}$$

となるが、これは第 1 章の 1.1.4 項で検討した「名目賃金のみが固定的であるような非ワルラスモデル」の均衡と基本的に同じである。したがって、この節のモデルは 1.1.4 項のモデルを特殊ケースとして含んだより一般的なモデルとなっていることが分かる。

市場均衡の比較静学

様々な外生変数が変化したとき、市場均衡にいかなる影響が生じるかを検討しよう。議論に際して外生変数の変化を（ｉ）需要サイドの変化（＝AD 曲線をシフトさせる変化）と（ⅱ）供給サイドの変化（＝AS 曲線をシフトさせる変化）に分けて検討するのが便利である。名目貨幣量 $\overline{M}$ や家計の消費性向 α の変化は前者に該当し、生産性 A や名目賃金 $\overline{W}$ 、代替の弾力性 η の変化は後者に該当している。

（ｉ）需要サイドの変化

(9) より、名目貨幣量 $\overline{M}$ や家計の消費性向 α が上昇すると AD 曲線が上方にシフトし、生産量と物価は共に上昇する。これは、それらの上昇によって家計の財需要が刺激され、その結果、各企業が価格を高く設定すると同時に生産量を引き上げるからである。財需要の増加に対応して価格をどの程度吊り上げるかは生産関数のパラメーター a の大きさに依存する。a ＝1 の場合、すなわち生産関数が収穫一定の場合、限界費用（＝追加的に 1 単位の財を生産するのにかかる費用）も一定値となるので、各企業の直面する需要がどれだけ上昇しても最適価格は変化しない。したがってこの場合、$\overline{M}$ や α の上昇によって引き起こされる財需要の上昇は全て生産量の上昇となって現れることになる。一方、a ＜1 の場合、すなわち生産関数が収穫逓減の場合、限界費用は生産量の増加に伴って逓増するので、各企業の設定する最適価格も生産量の増加と共に上昇する。この場合、$\overline{M}$ や α の上昇によって引き起こされる財需要の上昇の一部はこうした価格の上昇によって相殺されるので、生

産量は増加するものの、その増加幅は$a=1$の場合と比べると小さくなる。

以上の結果は、第1章の1.1.3節で取り上げた標準的な非ワルラスモデルにおける結論と基本的に類似している。標準的な非ワルラスモデルにおいて、消費性向αの低下は生産量を引き下げ（＝「節約のパラドックス」）、名目貨幣量$\overline{M}$の上昇は生産量を刺激する（＝「貨幣の非中立性」）が、本節のモデルでは消費性向αの低下は（物価の下落を伴いつつ）生産量を引き下げ、名目貨幣量$\overline{M}$の上昇は（物価の上昇を伴いつつ）生産量を刺激することになる。

なお、このモデルにおいて貨幣の中立性が成立しない理由は（言うまでもなく）名目賃金が固定的だからである。もし名目賃金が伸縮的ならば、$\overline{M}$の上昇によって生じる雇用の拡大が名目賃金を引き上げ、これが企業のマークアップ行動を通じてさらなる物価の上昇をもたらすことで、結果的に$\overline{M}$の動きと名目諸価格の動きが比例することになるからである。

（ⅱ）供給サイドの変化

標準的な非ワルラスモデルにおいて均衡生産量の大きさは需要サイドのパラメーターのみで規定され、供給サイドのパラメーターの変化が市場均衡に影響することはなかった。それに対して本節のモデルは、供給サイドの変化が不完全雇用下のマクロ経済にどのような影響を与えるかを分析できる点で標準モデルよりも優れている。このモデルにおいて生産性Aの上昇、名目賃金$\overline{W}$の低下、および代替の弾力性ηの上昇といった変化は（10）よりAS曲線を下方にシフトさせ物価（生産量）を引き下げる（引き上げる）が、これは、それらの変化が各企業の限界費用を低下させることで各企業の選択する価格（生産量）が低下（上昇）するからである。こうした結果は、ケインズ的な不完全雇用の経済においても生産性の向上や賃金カットを通じたコスト削減、企業の独占力の抑制といった効率性の向上を目的とした政策は景気を刺激しうることを示唆している。

実質賃金の硬直性に関する注意

　最後に、賃金の硬直性に関して一つ注意を述べておく。本節では名目賃金$\overline{W}$の硬直性を想定して議論を進めてきたが、例えば企業の生産関数に関して$a=1$が成立するような場合、（11）の第1式より実質賃金が（労働需給の大きさとは関係なく）

$$（12）\qquad w\ （\equiv \frac{W}{P}）=\frac{A(\eta-1)}{\eta}$$

と硬直化するので、名目賃金の硬直性を仮定せずともケインズ的な不完全雇用均衡を導出できるのではないかと考える読者がいるかもしれないが、それは正しくない。なぜなら、このモデルでは（たとえ実質賃金が固定的であっても）名目賃金が伸縮的である限り、各企業の労働需要はその名目賃金の変化に応じて変化するからである。独占的競争下において各企業の労働需要は家計の財需要に依存するが、家計の実質支出総額C（$=E/P$）は（4）より

$$C=\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(wl_i^d+\pi_i)+\frac{\overline{M}}{P}\right]$$

と表され、実質賃金wが固定的でも物価Pが変化すると実質残高効果（$=\overline{M}/P$の変化）を通じて実質支出総額（ひいては各財への財需要）も変化する。しかもこの場合、物価は（12）より名目賃金に比例するので、結局企業の労働需要は名目賃金に依存することになる。したがって、（たとえ実質賃金が硬直的であったとしても）名目賃金が伸縮的に調整される限り完全雇用が成立することになる。

３．２　財政政策の厚生効果

　この節では前節の*AD-AS*モデルを世代重複モデルへと拡張し、財政政策の厚生効果を第1章や第2章と同様の手順で検討する[2]。第1章（＝45度線モデル）や第2章（＝*IS-LM*モ

[2] 本節の議論は田中（2010b）に基づいている。

デル）のモデル設定の下では

① 無駄な政府支出を実施しても、各世代の厚生は上がりも下がりもしない

② 今期の政府支出の財源を将来世代へと転嫁しても、将来世代の厚生は悪化せず、しかも現在世代の厚生は改善する

という結論が成立したが、*AD-AS* モデルの下ではこれらの結論はもはや成立しないことを明らかにする。

以下では、まず 3.2.1 項において財政政策の厚生効果を論じる際のベンチマークケースとして政府部門を捨象した世代重複型の *AD-AS* モデルを提示し、その理論構造を検討する。次に、3.2.2 項と 3.2.3 項ではベンチマークモデルに政府部門を導入して財政政策の効果を考察する。まず 3.2.2 項では、政府が期間 t に実施する政府支出をその期の若年世代（＝世代 t）への一括税で調達する状況――それを Case 1 と呼ぶ――を想定し、そのような財政政策が各世代の厚生にどのような影響を及ぼすかをベンチマークケースと比較する形で検討する。次に、3.2.3 項では、政府が期間 t における政府支出を世代 t からの借金（＝新規の国債発行）で賄い、次期（＝期間 $t+1$）にその返済のための財源を世代 $t+1$ への一括税で徴収するような状況――それを Case 2 と呼ぶ――を想定して、それが各世代の厚生にどのような影響を及ぼすかを Case 1 と比較する形で検討する。最後に、3.2.4 項にて本節の結論を要約する。

３．２．１　ベンチマークケース

3.1 節の静学的な *AD-AS* モデルを世代重複経済へと拡張したモデルを考える。各世代の家計数は 1 で固定され、時間を通じて変化しないものとする。各家計は若年期と老年期の 2 期間生き、期間 t に若年期を過ごす世代を世代 t と呼ぶことにする。各家計は若年期に企業を設立し、そこに自らの労働力を供給して賃金を獲得すると同時に企業の所有者として利潤を受け取り、生産終了後、その期の内に企業を解散するものとする。そして、稼いだ所

得を消費と貯蓄に振り分けるわけであるが、本節では貯蓄の具体的手段として（政府が発行する国債を除くと）貨幣のみが存在するような経済を想定する。すなわち、各家計は若年期に得た所得の一部でその期の老年家計が保有している貨幣を買い取り（＝生産活動で得た財を老年家計に販売することで貨幣を獲得し）、自らが老年になったとき、今度はその貨幣をその期の若年世代へと売却する（＝その貨幣でその期の若年世代が生産した財を購入する）ような世界を想定するわけである。なお、本節では一貫して経済内の名目貨幣量は変化しない状況を想定して議論を進めることにする。

以下では、この経済を構成する各経済主体の最適化行動を順に説明し、その結果として生じる市場均衡の状態を導出しよう。

世代tの行動

世代tの効用最大化問題は以下のように定式化できる。

$$\max_{c_t^y(i),c_{t+1}^o(i)} \quad U_t = \alpha \log C_t^y + (1-\alpha)\log C_{t+1}^o$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n p_t(i)c_t^y(i) + M_t^d = \sum_{i=1}^n [\overline{W} l_t^d(i) + \Pi_t(i)] \qquad (l_t^d(i)\text{：企業}i\text{の有効労働需要})$$

$$\sum_{i=1}^n p_{t+1}(i)c_{t+1}^o(i) = M_t^d$$

$$\left(C_t^y \equiv n\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}[c_t^y(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1}, \quad C_{t+1}^o \equiv n\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}[c_{t+1}^o(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \right)$$

ここで、$p_t(i)$は期間tにおける第i財の名目価格、$c_t^y(i)$は期間tの若年世代（＝世代t）が消費する第i財の量、$c_{t+1}^o(i)$は期間$t+1$の老年世代（＝世代t）が消費する第i財の量、$\overline{W}$は名目賃金、$l_t^d(i)$は企業iの有効労働需要、$\Pi_t(i)$は企業iから受け取る名目利潤、M_t^dは貯蓄目的で購入する名目貨幣量、C_t^y（C_{t+1}^o）は若年期（老年期）の効用指標（sub-utility）を意味している。前節と同様、労働市場において名目賃金$\overline{W}$は外生的・固定的で、家計は

各企業の有効労働需要$l_t^d(i)$を制約として受け入れた上で消費・貯蓄の再決定を行うものとする（こうしたケインズ的失業の局面が生じるための条件については本章の付録 D を参照せよ）。

以前と同様に、上の効用最大化問題は 2 段階に分けて解くことができる。まず、効用最大化の第 1 段階では各期の消費財への名目支出総額E_t^yとE_{t+1}^oを所与として効用指標C_t^yとC_{t+1}^oを最大にするような各財の最適消費量を導出するので、その問題と解はそれぞれ以下のようになる。

$$\max_{c_t^y(i)} \quad C_t^y = n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}[c_t^y(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_t(i)c_t^y(i) = E_t^y$$

（13） $$c_t^y(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{E_t^y}{P_t}, \quad P_tC_t^y = E_t^y \quad \left(P_t \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[p_t(i)]^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}\right)$$

$$\max_{c_{t+1}^o(i)} \quad C_{t+1}^o = n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}[c_{t+1}^o(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{t+1}(i)c_{t+1}^o(i) = E_{t+1}^o$$

（14） $$c_{t+1}^o(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_{t+1}(i)}{P_{t+1}}\right)^{-\eta}\frac{E_{t+1}^o}{P_{t+1}}, \quad P_{t+1}C_{t+1}^o = E_{t+1}^o \quad \left(P_{t+1} \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[p_{t+1}(i)]^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}\right)$$

以上の結果をふまえて、効用最大化の第 2 段階の問題と解はそれぞれ以下のようになる。

$$\max_{C_t^y, C_{t+1}^o} \quad U_t \quad \text{s.t.} \quad P_tC_t^y + M_t^d = \sum_{i=1}^{n}[\overline{W}l_t^d(i) + \Pi_t(i)],\ P_{t+1}C_{t+1}^o = M_t^d$$

（15） $$P_tC_t^y = \alpha I_t, \quad M_t^d = (1-\alpha)I_t \quad \left(I_t \equiv \sum_{i=1}^{n}[\overline{W}l_t^d(i) + \Pi_t(i)]\right)$$

世代$t-1$の行動

世代$t-1$の最適化問題は以下のとおり。

$$\max_{c_t^o(i)} \quad C_t^o = n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}[c_t^o(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_t(i)c_t^o(i) = \overline{M}$$

すなわち、世代$t-1$はその期の期首に保有している名目貨幣量$\overline{M}$を全て消費財の購入に充てるが、その際、効用指標C_t^oを最大にするように各財の消費量$c_t^o(i)$を決定するので、その最適計画は以下のように表せる。

（16）$$c_t^o(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{\overline{M}}{P_t}, \quad P_tC_t^o = \overline{M}$$

企業の行動

経済にはn個の差別化された財が存在し、第i財は企業iによって独占的に供給される。これらの企業は毎期その期の若年世代によって設立され、労働のみを生産要素として財を生産し、生産終了後はその期のうちに解散されるものとする。各企業は（非ワルラス的な意味での）需要制約には服さず、自らの生産する財に対する需要関数（＝（13）の第 1 式と（14）の第 1 式）を正確に把握した上で利潤を最大にするような財価格と生産量を決定するので、その利潤最大化問題は以下のようになる。

（17）$$\max_{p_t(i)} \quad \Pi_t(i) = p_t(i)y_t(i) - \overline{W}l_t(i)$$

$$\text{s.t.} \quad y_t(i) = A[l_t(i)]^a \quad (0 < a < 1)$$

$$y_t(i) = c_t^y(i) + c_t^o(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{E_t^y + \overline{M}}{P_t}$$

ここで、$y_t(i)$は企業iの期間tにおける生産量、$l_t(i)$は企業iの期間tにおける労働投入量を意味している。なお、以下では企業の生産関数が規模に関して収穫逓減（$0 < a < 1$）であるような状況を想定して議論を進める[3]。

[3] 生産関数が規模に関して収穫一定（$a = 1$）の場合、各企業が設定する最適価格はその期

上の利潤最大化問題の 1 階の条件を求めると以下のようになる。

（18）　　$\left(\frac{\partial \Pi_t(i)}{\partial p_t(i)}=0\right)$　　$[p_t(i)]^{-\eta+\frac{\eta}{a}+1}=A^{-1/a}\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\left(\frac{1}{n}\frac{E_t^y+\overline{M}}{P_t^{1-\eta}}\right)^{(1-a)/a}$

これより、企業 i の設定する価格 $p_t(i)$ は財の種類 i には依存せず、その結果

（19）　　$p_t(i)=p_t=P_t$

が成立するので、これを（18）に代入して価格に関して解き直すことで、各企業の設定する最適価格は以下のようになる。

（20）　　$p_t(i)=P_t=A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^a\left(\frac{E_t^y+\overline{M}}{n}\right)^{1-a}$

なお、（19）を（17）の 2 つ目の制約条件（＝企業 i の直面する需要関数）に代入することで、企業 i の生産量は以下のようになる。

（21）　　$y_t(i)$（$=y_t$）$=\frac{1}{n}\frac{E_t^y+\overline{M}}{P_t}$　→　$nP_ty_t=P_tC_t^y+\overline{M}$

市場均衡の状態

以上で各経済主体の最適化行動を論じ終えたので、市場均衡の状態を検討しよう。まず、世代 t の第 2 段階の効用最大化条件（15）から

（22）　　$P_tC_t^y=\frac{\alpha}{1-\alpha}M_t^d$

が成立するが、これに貨幣市場の均衡条件式：$\overline{M}=M_t^d$ と（21）を代入して整理することで各企業の生産量 y_t を以下のように表すことができる。

（23）　　$y_t=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\alpha}\frac{M}{P_t}$

これは、物価 P_t が与えられた時の各企業の生産量 y_t の大きさを示しており、いわゆる AD

の生産量とは独立な一定値（$P^*=\eta W/(\eta-1)$）となり、この場合、財政政策の厚生効果は第 1 章や第 2 章で得られた結論と全く同じになる。

曲線である。他方、このモデルの AS 曲線、すなわち各財の需要量（＝生産量）y_t が与えられた時の物価 P_t の大きさを示した関係は（20）および（21）より

$$P_t = A^{-1/a}\,\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\;y_t^{(1-a)/a} \tag{24}$$

で示される。したがって、このモデルの均衡は（23）と（24）を同時に満たす (y_t, P_t) で与えられ、それらを計算すると以下のようになる。

$$y_t^{bench} = A\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{-a}\left(\frac{1}{n}\frac{\overline{M}}{1-\alpha}\right)^{a},\quad P_t^{bench} = A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left(\frac{1}{n}\frac{\overline{M}}{1-\alpha}\right)^{1-a} \tag{25}$$

したがって、本項のモデルの市場均衡の性質は 3.1 節で検討した静学的 AD-AS モデルの市場均衡（11）とほとんど同じになる。また、均衡における各世代の効用指標（＝各世代の期間 t における実質支出総額）は（22）、（16）の第 2 式、貨幣の需給均衡条件：$\overline{M} = M_t^d$ および（25）の第 2 式よりそれぞれ以下のように求められる。

$$(C_t^y)^{bench} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_t^{bench}},\quad (C_t^o)^{bench} = \frac{\overline{M}}{P_t^{bench}} \tag{26}$$

３．２．２　Case 1

次に、上述のベンチマークモデルに政府部門を導入し、財政政策が各世代の厚生にいかなる影響を与えるかを検討しよう。以下では議論の単純化のため、政府は期間 t にのみ、家計の効用にも企業の生産性にも寄与しないような“無駄”な政府支出を実施するものとする。さらにこの項では、その財源の調達方法として政府が世代 t（＝期間 t における若年家計）に同額の一括税を課すケース――これを Case 1 と呼ぶ――を想定する。なお、政府がその財源を借金で賄い、その返済分を次世代に転嫁する場合の分析は次項にて行う。

政府の行動

Case 1 において政府は期間 t に所与の一括税額 T を世代 t に課し、そうして得た財源を各

財への支出 $g_t(i)$ に充てる。この政府支出は家計の効用にも企業の生産性にも貢献しない無駄な性質のものと仮定する。政府は $G_t = n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}[g_t(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1}$ と定義された指標を最大にするように税収を各財の支出へと振り向けると想定するので、政府が解くべき最適化問題とその解はそれぞれ以下のようになる。

$$\max_{g_t(i)} \quad G_t = n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}[g_t(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_t(i)g_t(i) = T \qquad (T\ \text{：所与})$$

（27）　$$g_t(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{T}{P_t}, \quad P_tG_t = T$$

世代 t の行動

このケースにおける世代 t の効用最大化問題は以下のようになる。

$$\max_{c_t^y(i), c_{t+1}^o(i)} \quad U_t = \alpha\log C_t^y + (1-\alpha)\log C_{t+1}^o$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_t(i)c_t^y(i) + M_t^d = \sum_{i=1}^{n}[\overline{W}l_t^d(i) + \Pi_t(i)] - T,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{t+1}(i)c_{t+1}^o(i) = M_t^d$$

ベンチマークケースとの違いは、Case 1 では世代 t に一括税 T が課されているという点である。したがって、世代 t の第 1 段階と第 2 段階の最適計画はそれぞれ以下のようになる。

（第 1 段階）

（28）　$$c_t^y(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{E_t^y}{P_t}, \quad P_tC_t^y = E_t^y \qquad \left(P_t \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[p_t(i)]^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}\right)$$

$$c_{t+1}^o(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_{t+1}(i)}{P_{t+1}}\right)^{-\eta}\frac{E_{t+1}^o}{P_{t+1}}, \quad P_{t+1}C_{t+1}^o = E_{t+1}^o \qquad \left(P_{t+1} \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[p_{t+1}(i)]^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}\right)$$

（第 2 段階）

（29）　$P_t C_t^y = \alpha\,[I_t - T],\quad M_t^d = (1-\alpha)\,[I_t - T]\qquad（I_t \equiv \sum_{i=1}^{n}[\overline{W} l_t^d(i) + \Pi_t(i)]）$

世代$t-1$の行動

世代$t-1$の行動は前節のベンチマークケースと全く同じなので、その結果を再掲すると以下のとおり。

（30）　$c_t^o(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{\overline{M}}{P_t},\qquad P_t C_t^o = \overline{M}$

企業の行動

企業iの行動も基本的にはベンチマークモデルと同じであるが、本項では第i財に対する需要として若年世代の消費（＝（28）の第 1 式）と老年世代の消費（＝（30）の第 1 式）に加えて政府の消費（＝（27）の第 1 式）が新たに付け加わるので、企業iの直面する需要関数は次のようになる。

（31）　$y_t(i) = c_t^y(i) + c_t^o(i) + g_t(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{E_t^y + \overline{M} + T}{P_t}$

この点を考慮した上でベンチマークケースと同様の利潤最大化問題を解くと、企業iの設定する最適価格は以下のようになる。

（32）　$p_t(i)\ （= P_t）= A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left(\frac{E_t^y + \overline{M} + T}{n}\right)^{1-a}$

なお、$p_t(i) = P_t$および（31）より、企業iの最適生産量は以下のようになる。

（33）　$y_t(i)\ （= y_t）= \frac{1}{n}\frac{E_t^y + \overline{M} + T}{P_t}\quad\rightarrow\quad nP_t y_t = P_t C_t^y + \overline{M} + T$

市場均衡の状態

まず、世代tの第2段階の効用最大化条件（29）から

（34）　$P_t C_t^y = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} M_t^d$

が成立するが、これに貨幣市場の均衡条件式：$\overline{M} = M_t^d$と（33）を代入して整理することで各企業の生産量y_tを以下のように表すことができる。

（35）　（AD曲線）　$y_t = \dfrac{1}{n}[\dfrac{1}{1-\alpha}\dfrac{\overline{M}}{P_t} + \dfrac{T}{P_t}]$

他方、AS曲線は（32）と（33）より

（36）　（AS曲線）　$P_t = A^{-1/a}\dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{\overline{W}}{a}\, y_t^{(1-a)/a}$

で与えられるので、均衡における生産量および物価はそれぞれ以下のように求められる。

（37）　$y_t^{case1} = A\left(\dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{\overline{W}}{a}\right)^{-a}\left[\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\overline{M}}{1-\alpha}+T\right)\right]^{a},$

$$P_t^{case1} = A^{-1}\left(\dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left[\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\overline{M}}{1-\alpha}+T\right)\right]^{1-a}$$

（25）との比較から明らかなように、Case 1における生産量と物価は共にベンチマークケースよりも大きくなる。

$$y_t^{case1} > y_t^{bench}, \quad P_t^{case1} > P_t^{bench}$$

Case 1 では所与の政府支出Tが実施されることで総需要が引き上げられる反面、世代tに同額の一括税が課されることで彼の期間tにおける名目支出総額$P_t C_t^y$が低下するが、世代tの消費平準化行動の結果$P_t C_t^y$の低下幅はTよりも小さくなる（→（29）の第1式を見よ）ので、最終的に各企業の生産量が増加ことになる。ただ、その過程で限界費用が逓増するので、各企業の設定する最適価格（＝物価）もまた上昇する。以上がCase 1の生産量と物価がベンチマークケースよりも大きくなる理由である。

では、以上の変化は経済厚生の観点から望ましいと言えるだろうか。(34)、(30）の第2

式、貨幣の需給均衡条件：$\overline{M} = M_t^d$ および（37）の第 2 式より、Case 1 とベンチマークケースの均衡における各世代の効用指標の大小関係は以下のようになる。

（38）
$$(C_t^y)^{case1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_t^{case1}} < (C_t^y)^{bench} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_t^{bench}}$$
$$(C_t^o)^{case1} = \frac{\overline{M}}{P_t^{case1}} < (C_t^o)^{bench} = \frac{\overline{M}}{P_t^{bench}}$$

すなわち、政府支出の実施によって各世代の効用指標はベンチマークケースよりも低下することになる。これは、政府支出の実施によって確かに生産量は増加するものの、その増加幅は政府支出の大きさほどではない[4]ため、政府支出自体に家計の効用や企業の生産性を改善するような効能がないというここでの想定の下では、結果的に各世代の消費が低下してその厚生が悪化するためである。なお、期間$t+1$以降については、各期の老年家計の保有する名目貨幣量が$\overline{M}$で外生的・固定的であることに加え、政府も期間$t+1$以降は経済に介入しないので、ベンチマークケースとCase 1 とで全く同じ均衡が成立する。したがって、Case 1 はベンチマークと比較して（世代$t-1$と世代tの厚生が劣化し、世代$t+1$以降の厚生に変化はないので）パレートの意味で劣った均衡状態を実現することが分かる。

以上の結論が第 1 章（＝45 度線モデル）や第 2 章（＝*IS-LM* モデル）で導かれた結論と大きく異なることは明らかであろう。第 1 章や第 2 章のモデル設定の下では、政府が無駄な性質の政府支出を実行しても各世代の厚生が悪化することはなかった（改善することもなかった）が、本章の *AD-AS* モデルの設定では、政府が政府支出を行うと生産量が増加する過程で物価が上昇し、これが（物価が不変であればもっと増加していたはずの）財の生産量を抑制することで、現在世代の厚生を低下させるのである。この結果は、たとえケインズ的な需要不足の経済においても無駄な政府支出を正当化することはできないことを示

[4]（27）の第 2 式と（35）より $y_t = \frac{1}{n}[\frac{1}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_t} + G_t]$ が成立するが、実質政府支出 G_t の増加は物価 P_t をも同時に押し上げるので、生産量の増加幅は政府支出の増加幅よりも小さくなる。

唆している。

なお、一括税を（若年期の世代tにではなく）老年期の世代tに課す場合、すなわち期間tにおける政府支出をいったん世代tからの借金で賄い、次期（＝期間$t+1$）にその返済分を再び世代tへの一括税によって確保する場合、その市場均衡は Case 1 と完全に一致することを容易に確認できる。これは、世代tにとって一括税を負担するタイミングが若年期であっても老年期であっても彼の生涯可処分所得に変化はなく、その結果、期間tにおける彼の消費・貯蓄決定に影響が生じない――すなわち「リカードの中立命題」が成立する――からである。

３．２．３　Case 2

前項では期間tにおける政府支出の財源をその期の若年家計から調達する場合を想定して分析を行ったが、この節では政府支出の財源を次世代へと転嫁するケース、すなわち期間tにおける政府支出をいったん世代tからの借金（＝新規国債発行）で賄い、期間$t+1$にその返済分をその期の若年家計（＝世代$t+1$）から一括税の形で調達するようなケース――これを Case 2 と呼ぶ――を想定して財政政策の厚生効果を再検討しよう。

A.　期間tにおける市場均衡

まず最初に、期間tにおける各経済主体の行動および市場均衡から検討しよう。

政府の行動

期間tにおいて政府は、Case 1 における税収Tと同額の財源をその期の若年世代（＝世代t）からの借金で賄い、それを各財の支出に充てる。したがって政府の最適化問題とその解は以下のとおり。

$$\max_{g_t(i)} \quad G_t = n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}[g_t(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_t(i)g_t(i) = D$$

（39） $$g_t(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{D}{P_t}, \quad P_tG_t = D$$

ここで D は新規国債発行額を意味し、$D = T$ を満たす。

世代 t の行動

世代 t の効用最大化問題は以下のように定式化される。

$$\max_{c_t^y(i),c_{t+1}^o(i)} \quad U_t = \alpha\log C_t^y + (1-\alpha)\log C_{t+1}^o$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_t(i)c_t^y(i) + M_t^d + D = \sum_{i=1}^{n}[\overline{W}l_t^d(i) + \Pi_t(i)]$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{t+1}(i)c_{t+1}^o(i) = M_t^d + D$$

この場合、世代 t の貯蓄手段は貨幣と国債の 2 つになるが、裁定上両者の収益率は一致しなければならないので、国債保有の名目利子率はゼロとなる（その結果、若年期における国債購入額と老年期におけるその返済額が共に D となる）。この効用最大化問題の各段階における解はそれぞれ以下のとおり。

（第 1 段階）

（40） $$c_t^y(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{E_t^y}{P_t}, \quad P_tC_t^y = E_t^y \quad \left(P_t \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[p_t(i)]^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}\right)$$

$$c_{t+1}^o(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_{t+1}(i)}{P_{t+1}}\right)^{-\eta}\frac{E_{t+1}^o}{P_{t+1}}, \quad P_{t+1}C_{t+1}^o = E_{t+1}^o \quad \left(P_{t+1} \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[p_{t+1}(i)]^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}\right)$$

（第 2 段階）

（41） $$P_tC_t^y = \alpha I_t, \quad M_t^d + D = (1-\alpha)I_t \quad \left(I_t \equiv \sum_{i=1}^{n}[\overline{W}l_t^d(i) + \Pi_t(i)]\right)$$

世代$t-1$の行動

世代$t-1$の行動は前節の Case 1 と全く同じなので、その結果を再掲すると以下のとおり。

（42）　$$c_t^o(i)=\frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{\overline{M}}{P_t},\qquad P_tC_t^o=\overline{M}$$

企業の行動

企業iの行動も基本的に Case 1 と同じであるが、ここでは第i財に対する各需要項目の表現が（39）の第 1 式、（40）の第 1 式、および（42）の第 1 式より以下のようになる。

（43）　$$y_t(i)=c_t^y(i)+c_t^o(i)+g_t(i)=\frac{1}{n}\left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\eta}\frac{E_t^y+\overline{M}+D}{P_t}$$

この点を考慮して利潤最大化問題を解くと、企業iの設定する最適価格は以下のようになる。

（44）　$$p_t(i)=P_t=A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^a\left(\frac{E_t^y+\overline{M}+D}{n}\right)^{1-a}$$

なお、$p_t(i)=P_t$および（43）より、企業iの最適生産量は以下のようになる。

（45）　$$y_t(i)\ (=y_t)=\frac{1}{n}\frac{E_t^y+\overline{M}+D}{P_t}\quad\rightarrow\quad nP_ty_t=P_tC_t^y+\overline{M}+D$$

市場均衡の状態

まず、世代tの第 2 段階の効用最大化条件（41）から

（46）　$$P_tC_t^y=\frac{\alpha}{1-\alpha}[M_t^d+D]$$

が成立するが、これに貨幣市場の均衡条件式：$\overline{M}=M_t^d$と（45）を代入して整理することで各企業の生産量y_tを以下のように表すことができる。

（AD曲線）　$$y_t=\frac{1}{n}\frac{1}{1-\alpha}\frac{\overline{M}+D}{P_t}$$

他方、AS曲線は（44）と（45）より

（AS曲線）　$P_t = A^{-1/a}\,\dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{\overline{W}}{a}\,y_t^{(1-a)/a}$

で与えられるので、均衡における生産量と物価はそれぞれ以下のように求められる。

（47）　$y_t^{case2} = A\left(\dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{\overline{W}}{a}\right)^{-a}\left(\dfrac{1}{n}\dfrac{\overline{M}+D}{1-\alpha}\right)^{a}, \quad P_t^{case2} = A^{-1}\left(\dfrac{\eta}{\eta-1}\dfrac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left(\dfrac{1}{n}\dfrac{\overline{M}+D}{1-\alpha}\right)^{1-a}$

（37）で示された Case 1 の均衡における生産量と物価と比較すると、生産量・物価ともに Case 2 の方が Case 1 よりも大きくなる。

$$y_t^{case2} > y_t^{case1}, \quad P_t^{case2} > P_t^{case1}$$

これは、Case 2 では Case 1 と同じ規模（$= T$）の政府支出が当該期の一括税によって賄われるのではなく、将来世代に負担を転嫁する形で調達されることになるため、世代tの若年期の名目支出総額が Case 1 の時よりも大きくなり（→この点は（29）の第 1 式と（41）の第 1 式の比較から明らかである）、その分、各企業の生産量も Case 1 の時より増大するためである。ただ、その過程で生じる限界費用の増加も Case 1 の時より大きくなるため、均衡における物価水準もまた Case 1 の時より高くなるのである。

では、均衡における各世代の効用指標（＝実質消費支出額）はどうであろうか。(46)、(42) の第 2 式、貨幣の需給均衡条件：$\overline{M} = M_t^d$、および（47）の第 2 式より、以下を導出できる。

（48）
$$(C_t^y)^{case2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}+D}{P_t^{case2}} > (C_t^y)^{case1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_t^{case1}}$$
$$(C_t^o)^{case2} = \frac{\overline{M}}{P_t^{case2}} < (C_t^o)^{case1} = \frac{\overline{M}}{P_t^{case1}}$$

ここで（48）の第 1 式の不等号が成立することの証明は本章の付録 E を参照せよ。これより、政府がその財源を将来世代へと転嫁する形で Case 1 と同じ規模の政府支出を実施した場合、その期の若年世代の効用指標は増加するが、老年世代の効用指標は低下することが分かる。このうち後者が成立する理由は、Case 1 より Case 2 の方が物価が高くなるので、

負の実質残高効果により老年世代の実質支出総額が低下することによる。一方、若年世代は上述の負の実質残高効果と、（Case 1 の時とは異なり）一括税を負担せずに済むという正の効果の相反する 2 つの影響を受けることになるが、均衡においては後者の効果が前者を上回るため、実質消費支出総額は Case 1 のときよりも改善することになる。

B.　期間$t+1$における市場均衡

今までと異なり、Case 2 においては期間$t+1$においても政府が前期の借金の返済およびその財源の調達という形で経済に介入するので、期間$t+1$の市場均衡がそれ以外のケースとどのように異なるかを検討する必要がある。以下では政府、世代t、世代$t+1$、企業の順に期間$t+1$における各経済主体の行動を論じ、その結果として成立する市場均衡を Case 1 と比較することにする。

政府の行動

政府は今期の借金返済額Dを世代$t+1$への一括税Tの形で徴収するので、その予算制約は以下のように表せる。

（49）　$D = T$

世代tの行動

世代tは前期から持ち越した貨幣$\overline{M}$および政府からの借金返済額Dを全て各財の購入に充てるので、効用最大化問題とその解はそれぞれ以下のようになる。

$$\max_{c^o_{t+1}(i)} \quad C^o_{t+1} = n\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}[c^o_{t+1}(i)]^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{t+1}(i)c^o_{t+1}(i) = \overline{M} + D$$

（50）$$c^o_{t+1}(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_{t+1}(i)}{P_{t+1}}\right)^{-\eta} \frac{\overline{M}+D}{P_{t+1}}, \quad P_{t+1}C^o_{t+1} = \overline{M} + D$$

（$P_{t+1} \equiv \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [p_{t+1}(i)]^{1-\eta} \right]^{1/1-\eta}$）

世代$t+1$の行動

世代$t+1$は政府から一括税Tを課されるので、その効用最大化問題と各段階における解はそれぞれ以下のようになる。

$$\max_{c_{t+1}^{y}(i), c_{t+2}^{o}(i)} \quad U_{t+1} = \alpha \log C_{t+1}^{y} + (1-\alpha) \log C_{t+2}^{o}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{t+1}(i) c_{t+1}^{y}(i) + M_{t+1}^{d} = \sum_{i=1}^{n} [\overline{W} l_{t+1}^{d}(i) + \Pi_{t+1}(i)] - T$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{t+2}(i) c_{t+2}^{o}(i) = M_{t+1}^{d}$$

（$C_{t+1}^{y} = n \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} [c_{t+1}^{y}(i)]^{(\eta-1)/\eta} \right]^{\eta/\eta-1}$，　$C_{t+2}^{o} = n \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} [c_{t+2}^{o}(i)]^{(\eta-1)/\eta} \right]^{\eta/\eta-1}$）

（第 1 段階）

(51)　$c_{t+1}^{y}(i) = \frac{1}{n} \left(\frac{p_{t+1}(i)}{P_{t+1}} \right)^{-\eta} \frac{E_{t+1}^{y}}{P_{t+1}} \quad P_{t+1} C_{t+1}^{y} = E_{t+1}^{y}$　（$P_{t+1} \equiv \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [p_{t+1}(i)]^{1-\eta} \right]^{1/1-\eta}$）

$c_{t+2}^{o}(i) = \frac{1}{n} \left(\frac{p_{t+2}(i)}{P_{t+2}} \right)^{-\eta} \frac{E_{t+2}^{o}}{P_{t+2}} \quad P_{t+2} C_{t+2}^{o} = E_{t+2}^{o}$　（$P_{t+2} \equiv \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [p_{t+2}(i)]^{1-\eta} \right]^{1/1-\eta}$）

（$E_{t+1}^{y} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_{t+1}(i) c_{t+1}^{y}(i)$，　$E_{t+2}^{o} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_{t+2}(i) c_{t+2}^{o}(i)$）

（第 2 段階）

(52)　$P_{t+1} C_{t+1}^{y} = \alpha [I_{t+1} - T]$,　$M_{t+1}^{d} = (1-\alpha) [I_{t+1} - T]$

（$I_{t+1} \equiv \sum_{i=1}^{n} [\overline{W} l_{t+1}^{d}(i) + \Pi_{t+1}(i)]$）

企業の行動

企業iの行動も基本的に以前と同じであるが、期間$t+1$において政府は支出を行わないので、第i財に対する総需要は（50）の第１式と（51）の第１式より以下のようになる。

（53）　$$y_{t+1}(i) = c^y_{t+1}(i) + c^o_{t+1}(i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_{t+1}(i)}{P_{t+1}}\right)^{-\eta} \frac{E^y_{t+1} + \overline{M} + D}{P_{t+1}}$$

したがって最適価格は以下のとおり。

（54）　$$p_{t+1}(i) = P_{t+1} = A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left(\frac{E^y_{t+1} + \overline{M} + D}{n}\right)^{1-a}$$

なお、$p_t(i) = P_t$ および（53）より、企業iの最適生産量は以下のように表せる。

（55）　$$y_{t+1}(i)\ (= y_{t+1}) = \frac{1}{n}\frac{E^y_{t+1} + \overline{M} + D}{P_{t+1}} \quad \rightarrow \quad nP_{t+1}y_{t+1} = P_{t+1}C^y_{t+1} + \overline{M} + D$$

市場均衡の状態

まず、世代tの第２段階の効用最大化条件（52）から

（56）　$$P_{t+1}C^y_{t+1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} M^d_{t+1}$$

が成立するが、これに貨幣市場の均衡条件式：$\overline{M} = M^d_{t+1}$と（55）を代入することで各企業の生産量y_tを以下のように表すことができる。

（AD曲線）　$$y_{t+1} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_{t+1}} + \frac{D}{P_{t+1}}\right]$$

他方、AS曲線は（54）と（55）より

（AS曲線）　$$P_{t+1} = A^{-1/a}\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\, y_{t+1}^{(1-a)/a}$$

で与えられるので、均衡における生産量と物価はそれぞれ以下のようになる。

（57）　$$y^{case2}_{t+1} = A\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{-a}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\overline{M}}{1-\alpha} + D\right)\right]^{a},$$

$$P_{t+1}^{case2} = A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\overline{M}}{1-\alpha}+D\right)\right]^{1-a}$$

一方、Case 1 では政府は期間$t+1$には経済に介入しないので、均衡における生産量と物価は以下のようにベンチマークケースの期間tにおける均衡と同じ値になる。

(58)　$$y_{t+1}^{case1} = A\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{-a}\left(\frac{1}{n}\frac{\overline{M}}{1-\alpha}\right)^{a},\quad P_{t+1}^{case1} = A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{\overline{W}}{a}\right)^{a}\left(\frac{1}{n}\frac{\overline{M}}{1-\alpha}\right)^{1-a}$$

したがって、Case 2 と Case 1 の期間$t+1$における生産量と物価を比較すると以下が成立する。

$$y_{t+1}^{case2} > y_{t+1}^{case1},\quad P_{t+1}^{case2} > P_{t+1}^{case1}$$

なぜ、Case 2 の方が Case 1 よりも生産量、物価ともに大きくなるのか。それは、Case 2 における世代$t+1$への税負担転嫁とは、本質的に期間$t+1$における若年世代（＝世代$t+1$）から老年世代（＝世代t）への所得移転に他ならないからである。政府は世代tへの借金返済のため、世代$t+1$に税を課し、それを返済に充てる。ところで、本節のモデルにおいて老年家計はその所得を全て消費に充てるのに対し、若年家計は若年期に稼ぐ所得の一定割合を貯蓄にまわすので、老年家計の消費性向は若年家計のそれよりも常に大きくなる。したがって、低い消費性向を有する若年から高い消費性向を有する老年への所得移転は、その期の消費需要を押し上げることで均衡生産量を高めると同時に物価の高騰をもたらすのである。

次に、均衡における各世代の効用指標の比較を行おう。(50）の第 2 式、(56)、貨幣の需給均衡条件：$\overline{M} = M_{t+1}^{d}$、および（58）の第 2 式より、期間$t+1$における各世代の効用指標に関して以下が成立する（ここで第 2 式の不等式は付録と同じ方法で証明できる)。

(59)　$$(C_{t+1}^{y})^{case2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_{t+1}^{case2}} < (C_{t+1}^{y})^{case1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_{t+1}^{case1}}$$

$$(C_{t+1}^{o})^{case2} = \frac{\overline{M}+D}{P_{t+1}^{case2}} > (C_{t+1}^{o})^{case1} = \frac{\overline{M}}{P_{t+1}^{case1}}$$

したがって、期間$t+1$においては、若年世代（＝世代$t+1$）の効用指標は Case 1 より Case 2 の方が小さくなる一方、老年世代（＝世代t）の効用指標は Case 1 より Case 2 の方が大きくなる。このうち前者の結果は、本稿の枠組みにおいて国債の次世代負担が生じることを意味している。第 1 章や第 2 章で明らかにしたように、物価指数が固定的であるような非ワルラスモデルにおいては、上述した次世代への税負担転嫁に伴う若年から老年への所得再分配によって生産量が増大し、それが世代$t+1$の税負担をちょうど相殺するだけの所得上昇をもたらすことで、国債の次世代負担は生じないのであった。しかし、本稿の枠組みでは生産量の増加に伴って物価も上昇し、それによって生産量の増加の一部が打ち消されるため、世代$t+1$の税負担を完全に相殺するだけの所得増加が実現せず、国債負担が発生することになるのである。

以上で Case 2 における期間tおよび期間$t+1$の均衡を論じ終えた。期間$t+2$以降については、各期の老年家計の保有する名目貨幣量が$\overline{M}$で固定的となることに加え、政府も期間$t+2$以降は経済に介入しないので、Case 2 と Case 1 とで全く同じ均衡が成立する。したがって Case 1 と Case 2 の均衡における各世代の厚生を比較すると以下のようになる。

$$U_{t-1}^{case1} > U_{t-1}^{case2}, \quad U_{t}^{case1} < U_{t}^{case2}, \quad U_{t+1}^{case1} > U_{t+1}^{case2}, \quad U_{t+s}^{case1} = U_{t+s}^{case2} \quad (s \geq 2)$$

３．２．４　結論の要約

最後に、本節の分析から得られた結果をまとめておこう。本節では世代重複的な *AD-AS* モデルを用いて財政政策の経済厚生効果を検討した。具体的には、政府部門を捨象したベンチマークケース、政府が期間tにのみ家計の効用にも企業の生産性にも貢献しない政府支出を実行し、その財源を世代tへの一括税に求める Case 1、および期間tにおける政府支出をいったん世代tからの借金で賄い、期間$t+1$にその返済分を世代$t+1$から一括税の形で調達する Case 2 の 3 つのケースの市場均衡における生産量、物価および各世代の効用指標（＝実質総支出）を比較した。その結果をまとめると以下のようになる。

＜期間tにおける各ケースの比較＞

（生産量）　$y_t^{bench} < y_t^{case1} < y_t^{case2}$

（物価）　$P_t^{bench} < P_t^{case1} < P_t^{case2}$

（若年の効用指標）　$(C_t^y)^{case1} < (C_t^y)^{bench} < (C_t^y)^{case2}$

（老年の効用指標）　$(C_t^o)^{case2} < (C_t^o)^{case1} < (C_t^o)^{bench}$

＜期間$t+1$における各ケースの比較＞

（生産量）　$y_{t+1}^{bench} = y_{t+1}^{case1} < y_{t+1}^{case2}$

（物価）　$P_{t+1}^{bench} = P_{t+1}^{case1} < P_{t+1}^{case2}$

（若年の効用指標）　$(C_{t+1}^y)^{case2} < (C_{t+1}^y)^{bench} = (C_{t+1}^y)^{case1}$

（老年の効用指標）　$(C_{t+1}^o)^{bench} = (C_{t+1}^o)^{case1} < (C_{t+1}^o)^{case2}$

＜ケース間での各世代の厚生比較＞

（世代$t-1$）　$U_{t-1}^{case2} < U_{t-1}^{case1} < U_{t-1}^{bench}$

（世代t）　$U_t^{case1} < U_t^{bench} < U_t^{case2}$

（世代$t+1$）　$U_{t+1}^{case2} < U_{t+1}^{bench} = U_{t+1}^{case1}$

（世代$t+2$以降）　$U_{t+s}^{bench} = U_{t+s}^{case1} = U_{t+s}^{case2}$　（$s \geq 2$）

したがって、物価が固定的であった 45 度線モデルや *IS-LM* モデルでは

① 無駄な政府支出を実施しても、各世代の厚生は上がりも下がりもしない

② 今期の政府支出の財源を将来世代へと転嫁しても、将来世代の厚生は悪化せず、しかも現在世代の厚生は改善する

という結果が成立したのに対し、物価が可変的な *AD-AS* モデルでは

① 無駄な政府支出を実施すると、その期の各世代の厚生が悪化する

② 今期の政府支出の財源をその期の若年世代から借金し、その返済負担を将来世代へと転嫁すると、税負担を免れたその期の若年世代の厚生は改善するが、税負担を転嫁された将来世代の厚生は悪化する

と結論が変化し、ケインズ的な枠組みの下でも「無駄な政府支出は実施するに値しない」という常識的な結論が支持されるようになることが分かる。

なお、以上の結論は各世代の家計が遺産動機を持たない場合の結果であるが、各世代が遺産動機を持つ場合、具体的には各家計の効用関数に若年期と老年期の消費量だけでなく次世代に残す実質遺産額も入っているようなモデルを用いて上と同様の分析を行っても、得られる結論はほとんど同じになることを示すことができる。この意味で、本節で得られた結論は一定の頑強性を有していることを注意しておく。

付録 A：3.1 節のモデルでケインズ的失業の局面が成立するための条件

ここでは、3.1 節で提示された静学的な *AD-AS* モデルにおいてケインズ的失業の局面が成立するための条件を導出する。以下ではまず各経済主体の観念的（notional）な意思決定を簡単に描写し、この経済におけるケインズ的失業の局面の定義した後、そのような条件を満たす名目賃金の存在領域を導出する。

観念的意思決定において家計は賦与された総労働時間 $\overline{L}$ を各企業に均等かつ非弾力的に供給しようとするので、その効用最大化問題は以下のようになる。

$$\max_{c_i, M_d} \quad U = \alpha \log C + (1-\alpha)\log\left(\frac{M_d}{P}\right) \qquad \left(C \equiv n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1}\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i c_i + M_d = \sum_{i=1}^{n}(W\bar{l} + \Pi_i) + \overline{M}$$

ここで、$\bar{l} \equiv \overline{L}/n$ は各企業に非弾力的に供給される労働時間を意味している。この問題の

第 1 段階および第 2 段階の解はそれぞれ以下のようになる。

（第 1 段階）

（A.1）　$c_i = \frac{1}{n}\left(\frac{p_i}{P}\right)^{-\eta}\frac{E}{P}$,　$PC = E$（$= \sum_{i=1}^{n} p_i c_i$）　（$P \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}$）

（第 2 段階）

（A.2）　$PC = \alpha\,[\sum_{i=1}^{n}(W\bar{l} + \Pi_i) + \overline{M}\,]$,　$M_d = (1-\alpha)\,[\sum_{i=1}^{n}(W\bar{l} + \Pi_i) + \overline{M}\,]$

一方、企業 i の観念的な利潤最大化問題は本文中と同様、以下のようになる。

$$\max_{p_i} \quad \Pi_i = p_i y_i - W l_i^d \qquad \text{s.t.} \quad y_i = A(l_i^d)^a,\quad y_i\ (= c_i) = \frac{1}{n}\left(\frac{p_i}{P}\right)^{-\eta}\frac{E}{P}$$

したがって、企業 i が選択する最適価格は以下のとおり。

（A.3）　p_i（$= P$）$= A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{W}{a}\right)^{a}\left(\frac{E}{n}\right)^{1-a}$

観念的意思決定における家計の予算制約に各企業の利潤定義式を代入することで、以下のワルラス法則を導出できる。

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(c_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n} W(l_i^d - \bar{l}) + [M_d - \overline{M}\,] = 0$$

ここで、各企業は

$$y_i = c_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

を制約条件として価格と生産量を決定するので、不均衡の生じる余地があるのは労働市場と貨幣市場ということになるが、このモデルにおいてケインズ的失業の局面とは労働市場が超過供給（＝貨幣市場が超過需要）の状態、すなわち

（A.4）　$l_i^d < \bar{l}$　（もしくは、$M_d > \overline{M}$）

と定義できるので、以下では（A.4）が成立するような名目賃金の存在領域を導出すればよい。

まず、（A.4）より

（A.5）　$l_i^d < \bar{l} \quad \Leftrightarrow \quad A(l_i^d)^a$ （$= c_i$）$< A\bar{l}^a$ （$= \bar{y}$）

が成立する。ここで、c_i に関しては（A.1）の第 1 式と $p_i = P$ から

$$c_i = \frac{1}{n}\frac{E}{P} = \frac{C}{n}$$

が成立し、かつ、観念的意思決定下において家計の各財への名目支出総額 E は

（A.6）　$E = PC = \alpha\,[\sum_{i=1}^{n}(W\bar{l} + \Pi_i) + \overline{M}\,] = \alpha\,[nP\bar{y} + \overline{M}\,]$ 　（$\bar{y} \equiv A\bar{l}^a$）

と書き直すことができるので、これらを（A.5）に代入することで、（A.4）を満たすような物価 P の存在領域は以下のようになる。

（A.7）　$P > \dfrac{\alpha\overline{M}}{(1-\alpha)n\bar{y}}$

一方、各企業の最適な価格設定行動により物価 P は

$$P = A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{W}{a}\right)^a\left(\frac{E}{n}\right)^{1-a}$$

と表現できるが、これに（A.6）を代入して整理することで、物価 P と名目賃金 W との間には以下の関係が成立する。

（A.8）　$W = kP^{1/a}(P\bar{y} + n^{-1}\overline{M})^{(a-1)/a}$ 　（$k \equiv A^{1/a}\alpha^{(a-1)/a}\dfrac{a(\eta-1)}{\eta}$）

（$W(0) = 0,\quad W'(P) > 0,\quad W''(P) > 0$）

以上、（A.7）および（A.8）より、このモデルにおいてケインズ的失業の局面が成立するための名目賃金の存在領域は以下のように図示できる。

＜図 3.2：3.1 節のモデルでケインズ的失業の局面が成立するための名目賃金の領域＞

付録 B：CES 関数の数学的特性

ここでは代替の弾力性が一定値となる CES 関数の数学的特性について検討する。

代替の弾力性とは、財iと財jの相対価格（＝p_i/p_j）が1%変化したとき、その最適消費比率（＝c_i/c_j）が何%変化するか」を意味し、数学的には以下のように定義される。

$$\text{財}\, i\, \text{の財}\, j\, \text{に対する代替の弾力性}\, e_{ij} \equiv -\frac{d(c_i/c_j)/(c_i/c_j)}{d(p_i/p_j)/(p_i/p_j)}$$

この値がどのように計算されるかを具体的に理解するために、次のような消費者の効用最大化問題を考えよう。

$$\max_{c_i} \quad C \equiv n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i c_i = E$$

この問題の1階の条件から

$$\text{(B.1)} \qquad c_i/c_j = (p_i/p_j)^{-\eta} \quad \rightarrow \quad \frac{d(c_i/c_j)}{d(p_i/p_j)} = -\eta \times (p_i/p_j)^{-\eta-1}$$

が成立するので、この場合の代替の弾力性e_{ij}は次のようになる。

$$e_{ij} = -\frac{d(c_i/c_j)}{d(p_i/p_j)} \times \frac{p_i/p_j}{c_i/c_j}$$

$$= \eta$$

すなわち、効用関数Cが上のような形で与えられると各財の間の代替の弾力性は一定値（＝η）となるわけで、これが関数Cを「代替の弾力性が一定（constant elasticity of substitution）の関数：CES関数」と呼ぶ理由である。

なお、この場合、財iと財jの支出比率σ_{ij}（$\equiv p_i c_i / p_j c_j$）は（B.1）より

$$\sigma_{ij} = (p_i/p_j)^{1-\eta}$$

となるので、この比率が相対価格p_i/p_jの変化に応じてどのように変化するかは、以下のように代替の弾力性の大きさに依存することになる。

$\eta>1$： 相対価格 p_i/p_j の上昇によって支出比率 σ_{ij} が低下

$\eta=1$： 相対価格 p_i/p_j の上昇によって支出比率 σ_{ij} は変化せず

$\eta<1$： 相対価格 p_i/p_j の上昇によって支出比率 σ_{ij} が上昇

ちなみに、$\eta=1$ の時、上の CES 型の効用関数 C はコブ＝ダグラス型へと収束するが、この点は以下のように証明できる。まず、効用関数 C の両辺の（自然）対数をとる。

$$\log C=\log n+\frac{\log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]}{(\eta-1)/\eta}$$

ここで、ロピタルの公式[5]を用いて右辺第 2 項を $\eta\to 1$ としたときの極限を計算すると以下のようになる（ただし、計算の過程で対数微分法[6]を用いる）。

$$\lim_{\eta\to 1}\frac{\log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]}{(\eta-1)/\eta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\log c_i}{n}\quad \left(=\log\left[\prod_{i=1}^{n}(c_i)^{1/n}\right]\right)$$

これより、$\eta\to 1$ の時、効用関数 C は

$$C=n\prod_{i=1}^{n}(c_i)^{1/n}$$

へと収束することが示された。

付録 C：最適化問題（1）の数学的解法とその経済学的意味合い

ここでは、最適化問題（1）の数学的解法とその経済学的意味合いについて検討する。以下、その問題と解を再掲しよう。

---

5 関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ に関して $x\to a$ と収束させたときの極限を求めるとき、$f(x)$ と $g(x)$ の $x\to a$ とした時の極限が（ⅰ）共に 0 となるか、（ⅱ）共に $\pm\infty$ となるとき、以下が成立する。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6 指数関数 $y=a^x$ に関して $\dfrac{dy}{dx}$ を求めると、$\dfrac{dy}{dx}=a^x\log a$ が成立する。

（1）　$\max_{c_i} \quad C \equiv n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1}$　　s.t.　$\sum_{i=1}^{n} p_i c_i = E$

（2）　$c_i = \frac{1}{n}\left(\frac{p_i}{P}\right)^{-\eta}\frac{E}{P}$　（$P \equiv \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\eta}\right]^{1/1-\eta}$）

（3）　$PC = E$　（$=\sum_{i=1}^{n} p_i c_i$）

問題（1）の解法とその経済学的意味合い

この問題を解くために以下のようなラグランジュ関数を設定する。

$$L = n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(c_i)^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/\eta-1} + \lambda\,[E - \sum_{i=1}^{n} p_i c_i\,]$$

最大化の 1 階の条件：$\partial L/\partial c_i = 0$ から以下を得る。

（C.1）　$c_i = \lambda^{-\eta} p_i^{-\eta} n^{-1} C$

これを問題（1）の制約条件に代入して C について解き、それを（C.1）に代入することで以下が成立する。

（C.2）　$c_i = \frac{p_i^{-\eta} E}{\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\eta}}$

ところで、ラグランジュ乗数 λ は一般に最適化問題の制約値（＝上の問題では E ）が 1 単位変化したとき、最適化された目的関数（＝上の問題では最適化された C ）がどれだけ変化するかを表しているが、問題（1）のように目的関数 C が選択変数 c_i （$i = 1,2,\cdots,n$ ）に関して 1 次同次で、かつ制約条件が選択変数 c_i （$i = 1,2,\cdots,n$ ）に関して線形のとき、ラグランジュ乗数 λ 、目的関数 C 、および制約値 E の間に以下の関係が成立する（この点についてはすぐ後で証明する)。

（C.3）　$\lambda = C/E$

これを（C.2）に代入し、それを再び（C.1）に代入して整理することで、以下が成立する。

$$\lambda^{-1} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\eta} \right]^{1/1-\eta}$$

ここで、ラグランジュ乗数の逆数λ^{-1}を物価指数Pと定義し、それを（C.1）と（C.3）に代入して整理することで、(2) と (3) を導出できる。

なお、この問題におけるラグランジュ乗数λは各財への名目支出総額Eが 1 単位上昇したとき指標Cがどれだけ上昇するかを意味しているので、その逆数である$P \equiv \lambda^{-1}$は指標Cを 1 単位上昇させるために各財への名目支出総額Eを最低限どれだけ増やさなければならないかを意味しているが、実際、このP（$\equiv \lambda^{-1}$）は（上述の効用最大化問題と双対な）以下の支出最小化問題におけるラグランジュ乗数の値と一致することを容易に確かめることができる。

$$\min_{E} \quad E = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i \qquad \text{s.t.} \quad C = n\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (c_i)^{(\eta-1)/\eta} \right]^{\eta/\eta-1}$$（C：所与）

最適化問題におけるラグランジュ乗数の意味

一般にラグランジュ乗数は最適化問題の制約値が 1 単位変化したとき、最適化された目的関数がどれだけ変化するかを表わしたものであり、特にその目的関数が選択変数に関して 1 次同次で、かつ制約条件が選択変数に関して線形のとき、ラグランジュ乗数は最適化された目的関数の制約値に対する比率として表現できる。以下ではこの点を証明しよう。

次のような最大化問題を考えよう。

$$\max_{x_1, x_2} \quad f(x_1, x_2) \qquad \text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

この問題を解くべくラグランジュ関数Lを設定し、その 1 階の条件を導出すると以下のようになる（以下で登場するλはラグランジュ乗数である)。

（C.4）　　（$\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0$）　　$f_1(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* p_1$

（C.5）　　（$\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0$）　　$f_2(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* p_2$

（C.6）　　（$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0$）　　$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = I$

これら 3 つの条件を満たす$(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$はこの問題の外生変数$(p_1, p_2, I)$の関数となる。ゆえに（C.6）は任意の制約値$I$に関して成立する恒等式となるので、その両辺を$I$で微分した値もまた等しくなる。

（C.7）　　$p_1 \dfrac{\partial x_1^*}{\partial I} + p_2 \dfrac{\partial x_2^*}{\partial I} = 1$

したがって、制約値Iの変化が最大化された目的関数$f(x_1^*, x_2^*)$に与える影響は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial I} &= f_1(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_1^*}{\partial I} + f_2(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_2^*}{\partial I}\\ &= \lambda^*[p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial I} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial I}] \qquad \text{（by （C.4）と（C.5））}\\ &= \lambda^* \qquad \text{（by （C.7））}\end{aligned}$$

以上で、最適化問題におけるラグランジュ乗数が、制約値の 1 単位の変化に対して最適化された目的関数がどれだけ変化するかを示した値であることが証明された。

なお、（C.4）～（C.6）から

（C.8）　　$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*)\, x_1^* + f_2(x_1^*, x_2^*)\, x_2^* &= \lambda^*[p_1 x_1^* + p_2 x_2^*]\\ &= \lambda^* I\end{aligned}$$

が成立するが、特に目的関数$f(x_1, x_2)$が選択変数に関して 1 次同次である場合、オイラーの定理より任意の選択変数の値に関して

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\, x_1 + f_2(x_1, x_2)\, x_2$$

が成立するので、これを上の関係（C.8）に代入することで

$$\frac{f(x_1^*, x_2^*)}{I} = \lambda^*$$

が成立する。したがって、目的関数が選択変数に関して 1 次同次で、かつ制約条件が選択変数に関して線形のとき、ラグランジュ乗数は最適化された目的関数の制約値に対する比率として表現できることが示された。

付録 D：3.2 節のモデルでケインズ的失業の局面が成立するための条件

ここでは、3.2 節で提示された世代重複型の *AD-AS* モデルにおいてケインズ的失業の局面が成立するための条件を導出する。そこで考察されている経済は、名目貨幣量が時間を通じて一定で、毎期全く同じ市場均衡が成立するような定常的な経済であるから、以下では期間 t に焦点を当ててケインズ的失業の局面が成立するための条件を導出する。なお、議論の手順は本章の付録 A と同じなので、ここでは議論の流れを簡潔に述べるに止める。

世代 t の観念的な効用最大化問題における期間 t のフローの予算制約は以下のようになる。

$$\sum_{i=1}^{n} p_t(i)c_t^y(i) + M_t^d = \sum_{i=1}^{n}[W\bar{l} + \Pi_t(i)]$$

ここで、$\bar{l}$ （$\equiv \bar{L}/n$）は各企業への観念的な労働供給を意味する。また、世代 $t-1$ の観念的な効用最大化問題における期間 t のフローの予算制約は本文中と同じ

$$\sum_{i=1}^{n} p_t(i)c_t^o(i) = \overline{M}$$

で示される。各企業の利潤の定義式は

$$\Pi_t(i) = p_t(i)y_t(i) - Wl_t^d(i)$$

なので、これらを組み合わせることでこの経済の期間 t におけるワルラス法則

$$\sum_{i=1}^{n} p_t(i)[c_t^y(i) + c_t^o(i) - y_t(i)] + \sum_{i=1}^{n} W[l_t^d(i) - \bar{l}] + [M_t^d - \overline{M}] = 0$$

を導出できる。ここで、各企業は

$$y_t(i) = c_t^y(i) + c_t^o(i)$$

を制約条件として価格と生産量を決めるので、不均衡の生じる余地があるのは労働市場と

貨幣市場ということになるが、このモデルにおいてケインズ的失業の局面とは労働市場が超過供給（＝貨幣市場が超過需要）の状態、すなわち

（D.1）　$l_t^d(i) < \bar{l}$　（もしくは、$M_t^d > \overline{M}$）

と定義できるので、以下では（A.1）が成立するような名目賃金の存在領域を導出すればよい。この条件を満たすような物価の領域は付録 A と同様の議論の手順を踏むことで以下のように求めることができる。

（D.2）　$$P > \frac{1}{n}\frac{1}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{\bar{y}}$$

一方、各企業の最適な価格設定行動から、この経済において物価Pと名目賃金Wとの間には以下の関係が成立することを、やはり付録 A と同様の手順で導出できる。

（D.3）　$$W = kP^{1/a}(\alpha P\bar{y} + n^{-1}\overline{M})^{(a-1)/a}$$　（$W(0)=0$,　$W'(P)>0$,　$W''(P)>0$）

したがって、（D.2）および（D.3）を満たすような名目賃金の存在領域がこのモデルにおいてケインズ的失業の局面が成立するための条件となる。

付録 E：（48）で示された不等式の証明

ここでは（48）で示された不等式

$$(C_t^y)^{case2} > (C_t^y)^{case1}$$

を証明する。この証明自体は全く容易であるが、以下と同じ証明方法がそれ以降に登場する同様の不等式の証明にも適用できるので、やや詳しく書いておくことにする。

（48）と（38）より、以下が成立する。

$$(C_t^y)^{case2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}+D}{P_t^{case2}}$$　（$P_t^{case1} = A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{W}{a}\right)^a\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\overline{M}}{1-\alpha}+D\right)\right]^{1-a}$）

$$(C_t^y)^{case1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\overline{M}}{P_t^{case1}}$$　（$P_t^{case2} = A^{-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\frac{W}{a}\right)^a\left(\frac{1}{n}\frac{\overline{M}+D}{1-\alpha}\right)^{1-a}$）

ここで、関数 $f(D)$ を

$$f(D) \quad (\equiv \frac{(C_t^y)^{case2}}{(C_t^y)^{case1}}) \quad = \frac{M+D}{M}\left(\frac{M+(1-\alpha)D}{M+D}\right)^{1-a}$$

と定義すると、 $f(0)=1$ が成立するので、もし $f'(D)>0$ を証明することができれば、上の不等式（48）を証明できたことになる。ところで、関数 $g(D)$ を

$$g(D) \equiv \log f(D)$$

と定義すると、対数関数は単調増加関数なので

$$\mathrm{sign}[f'(D)]=\mathrm{sign}[g'(D)]$$

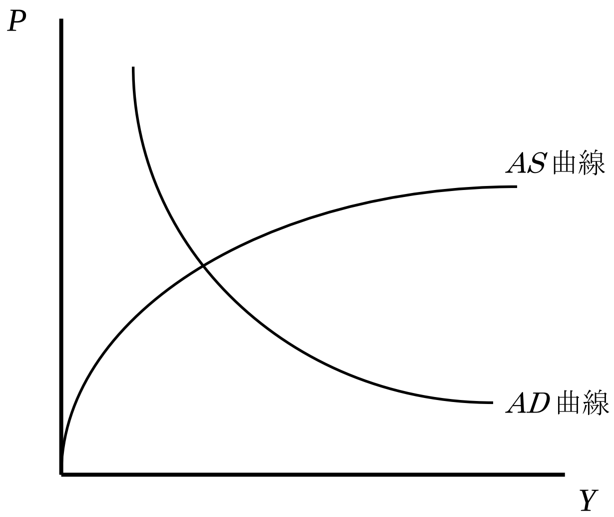
が成立し、ゆえに $f'(D)>0$ を証明することと $g'(D)>0$ を証明することが同値になる。ここで、後者は容易に証明することができるので、結果的に上の不等式が成立することを確認することができるのである。

参考文献

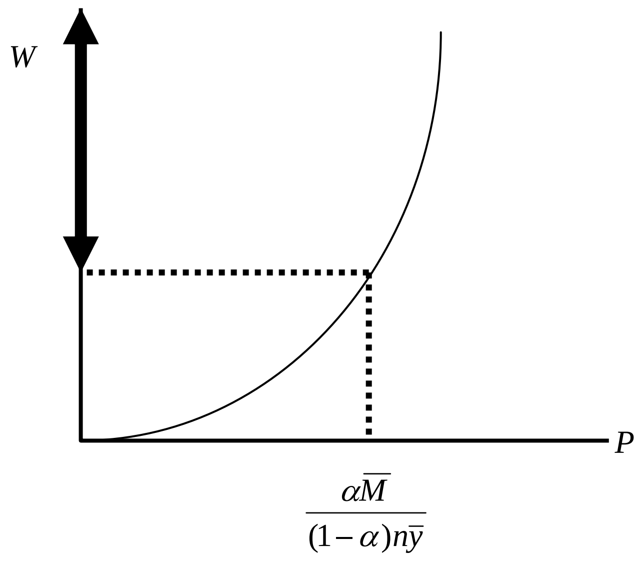
Dixit, A. and J. Stiglitz (1977) “Monopolistic Competition and Optimal Product Diversity”, *American Economic Review*, Vol.67, pp297-308

田中淳平（2010a）『ケインズ経済学の基礎：現代マクロ経済学の視点から』九州大学出版会

田中淳平（2010b）「不完全雇用下の国債負担：独占的競争モデルの場合」北九州市立大学経済学部ワーキングペーパーシリーズ



＜図 3.1 : *AD-AS* モデル＞



＜図 3.2 : 3.1 節のモデルでケインズ的失業の局面が生じるための名目賃金 W の存在領域＞