「解答例」

選抜区分	2024 年度　（選抜区分：一般選抜） 経済学部　　（科目名：数学）

問題１

(1)

$$a_2 = -2a_1 + 3b_1 = -2 \times 0 + 3 \times (-2) = -6$$
$$b_2 = -5a_1 + 6b_1 = -5 \times 0 + 6 \times (-2) = -12$$

(2)

$$x_1 = -5a_1 + 3b_1 = -5 \times 0 + 3 \times (-2) = -6$$

(3)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -5a_{n+1} + 3b_{n+1} \\ &= -5\left(-2a_n + 3b_n\right) + 3\left(-5a_n + 6b_n\right) \\ &= 10a_n - 15b_n - 15a_n + 18b_n = -5a_n + 3b_n \\ &= x_n \end{aligned}$$

よって、$x_n = x_1 = -6$ である．

(4) $x_n = -6$ なので, $-5a_n + 3b_n = -6$ より, $3b_n = 5a_n - 6$ であるから,

$$a_{n+1} = -2a_n + 3b_n = -2a_n + 5a_n - 6 = 3a_n - 6$$

よって, $a_{n+1} - 3 = 3(a_n - 3)$ が成立する．数列 $\{a_n - 3\}$ は, 初項 $a_1 - 3 = -3$, 公比 3 の等比数列であるから, $a_n - 3 = (-3)3^{n-1}$ である．これから, $a_n = (-3)3^{n-1} + 3 = -3^n + 3$ である．

$3b_n = 5a_n - 6$ であるから, $3b_n = 5 \cdot (-3^n + 3) - 6 = (-5) \cdot 3^n + 9$ となるので,
$b_n = (-5) \cdot 3^{n-1} + 3$ である．

問題２

(1) 場合分けして書けば,

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)(x+1) & (-1 \leqq x < 1) \\ (x-1)(x-3) & (1 \leqq x \leqq 3). \end{cases}$$

これを用いて $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f(2) = -1$.

(2)

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-t}^{1} (-x^2 + 1)dx + \int_{1}^{3t} (x^2 - 4x + 3)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-t}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_{1}^{3t} \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t + \frac{2}{3}\right] + \left[9t^3 - 18t^2 + 9t - \frac{4}{3}\right] \\ &= \frac{26}{3}t^3 - 18t^2 + 10t - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

よって，$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{26}{81} - 2 + \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{80}{81}$.

(3)

$$g'(t) = 26t^2 - 36t + 10 = 2(13t^2 - 2 \cdot 9t + 5),$$

である．$13t^2 - 2 \cdot 9t + 5 = 0$ の解は,

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 13 \cdot 5}}{13} = \frac{5}{13}, 1, \tag{1}$$

である．なお，$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} < \frac{5}{13} < 1$ なので，これら二つの解はいずれも g の定義域に含まれる．このうち $t = 1$ については $g(1) = \frac{26}{3} - 18 + 10 - \frac{2}{3} = 0 < g(\frac{1}{3})$ なので，これは最大値ではない．ゆえに g の最大値は

$$g\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{2 \cdot 5^3}{3 \cdot 13^2} - \frac{18 \cdot 5^2}{13^2} + \frac{2 \cdot 5^2}{13} - \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5^2}{3 \cdot 13^2}(5 - 27) + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 - 2 \cdot 13^2}{3 \cdot 13^2}.$$

これを簡単化すると

$$\frac{2}{3 \cdot 13^2}(-22 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 \cdot 13 - 13^2) = \frac{2(5^2 \cdot 17 - 13^2)}{3 \cdot 13^2} = \frac{2(425 - 169)}{3 \cdot 13^2} = \frac{512}{507}.$$

以上を下記の増減表にまとめ，g の最大値として $t = \frac{5}{13}$ のとき $\frac{512}{507}$ を得る．

t	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{13}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$g(t)$	$\frac{80}{81}$	$\nearrow$	最大 $\frac{512}{507}$	$\searrow$	0

問題３

(1) 点 C は線分 AD を 5 : 4 に内分するため, $CD = \dfrac{4}{9}AD$ である．方べきの定理より, $BD^2 = CD \cdot AD = \dfrac{4}{9}AD^2$ であるから, $AD = \dfrac{3}{2}$ である.

(2) 三角形 BCD と三角形 ABD は相似であるから, BC：AB=BD：AD=2：3 となり, $BC = \dfrac{4}{3}$ である.

(3) 三角形 BCD と三角形 ABD は相似であるから, $\angle ABD = \angle BCD = 180^\circ - \theta$. 余弦定理より,

$$\cos \angle ABD = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2 \cdot AB \cdot BD} = \frac{4 + 1 - \frac{9}{4}}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11}{16}$$

$\cos\theta = \cos(180^\circ - \angle ABD) = -\cos\angle ABD = -\frac{11}{16}$ である.

(4) (3) の $\cos\theta$ より, $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$ である．正弦定理より,

$$2R = \frac{AB}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$$

$R = \dfrac{1}{\sin\theta} = \frac{16\sqrt{15}}{45}$.

(5)

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin\theta = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

BC：AB=2：3 であるから，$S_{\Delta BCD} = \dfrac{4}{9}S_{\Delta ABD}$ となる．$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta BCD} = \dfrac{5}{9}S_{\Delta ABD} = \dfrac{5\sqrt{15}}{48}$ である．三角形 ABC の面積と内接円の半径 r は下記の式を満たす.

$$\frac{r}{2}(AB + BC + CA) = S_{\Delta ABC} = \frac{5\sqrt{15}}{48}$$

$r = \dfrac{\sqrt{15}}{20}$ である.

問題 4

(1) 1 個のさいころを繰り返し 3 回投げるとき, 目の出方は $6^3 = 216$ 通りある. $abc = 9$ となるのは, $(a, b, c) = (1, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 3, 1)$ のときであるから, 求める確率は

$$\frac{3}{216} = \frac{1}{72}.$$

(2) $a + b + c = 5$ となるのは, $(a, b, c) = (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (3, 1, 1)$ の 6 通りある. よって, 求める確率は

$$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

(3) $a + b + c = 7$ となるのは,

$$\begin{aligned}(a, b, c) = &(1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 4, 2), (1, 5, 1), (2, 4, 1), (2, 3, 2), (2, 2, 3), (2, 1, 4), \\ &(3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 1, 3), (4, 2, 1), (4, 1, 2), (5, 1, 1)\end{aligned}$$

の 15 通りある. よって, 求める確率は

$$\frac{15}{216} = \frac{5}{72}.$$

(4) $a = 1$ のとき, $b + c + bc = 14$ より $(b, c) = (2, 4), (4, 2)$.

$a = 2$ のとき, $2(b + c) + bc = 14$ より $(b, c) = (1, 4), (4, 1)$.

$a = 3$ のとき, $3(b + c) + bc = 14$ となるが, これらを満たす b, c の組はない.

$a = 4$ のとき, $4(b + c) + bc = 14$ より $(b, c) = (1, 2), (2, 1)$.

$a = 5$ のとき, $5(b + c) + bc = 14$ となるが, これらを満たす b, c の組はない.

$a = 6$ のとき, $6(b + c) + bc = 14$ となるが, これらを満たす b, c の組はない.

よって, 求める確率は

$$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

(5) $a + b + c = 7$ となる事象を A, $ab + bc + ca = 14$ となる事象を B とする. このとき, (4) で示した解答より, $B \subset A$ であることがわかるので,

$$P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{36}, \quad P(A) = \frac{5}{72}.$$

よって, 求める条件付き確率は

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{5}.$$