2022(令和４)年度　個別学力検査　前期日程

経済学部　数学

【注　意】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験時間は 13 時 30 分から 15 時 10 分まで(100 分間)です。
3. この問題冊子は表紙以外に 2 ページあり、解答用紙は 4 枚、下書き用紙は 1 枚あります。
4. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
5. 解答はすべて解答用紙の解答欄に記入してください。
6. 解答用紙の氏名欄を除き、受験者本人の特定につながるような氏名、住所、学校名等は記述しないでください。
7. 解答用紙を持ち出してはいけません。持ち出した場合、試験をすべて無効とします。
8. 試験終了後、問題冊子および下書き用紙は持ち帰ってください。

問題1 (配点 50 点)

数列 $\{a_n\}$ は, 初項 $a_1 = \dfrac{1}{2}$ であり, 次の式を満たすとする.

$$a_n - a_{n+1} = 2(n+1)a_n a_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また, 数列 $\{b_n\}$ を, $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定める. 以下の問題に答えよ.

(1) a_2 と a_3 を求めよ.

(2) すべての自然数 n に対して, $a_n > 0$ であることを示せ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(5) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ.

問題2 (配点 50 点)

座標平面上の 2 つの曲線 $C_1 : y = ax^2$, $C_2 : y = \dfrac{1}{3}x^3 + b$ を考える. ただし, $a > 0$, $b > 0$ とする. 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点は点 $\mathrm{P}(p, ap^2)$ と点 $\mathrm{Q}(q, aq^2)$ の 2 点のみとし, これらの曲線で囲まれた図形の面積を S とする. ただし, $p < q$ とする. 以下の問題に答えよ.

(1) b の値を a を用いて表せ.

(2) p と q の値を a を用いて表せ.

(3) 面積 S を a を用いて表せ.

(4) 点 P を通る直線 $l : y = mx + n$ が曲線 C_1 と, 点 P とは異なる点 $\mathrm{R}(r, ar^2)$ で交わるとし, 直線 l と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積を T とする. $S = 4T$ となる m と n の値を a を用いて表せ.

問題３　(配点 50 点)

正方形 ABCD を考える．辺 AB 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 A，点 B とは異なるものとする．線分 PD を折り目として点 A を折り返した点を A' とする．線分 PD の長さを a，$\angle \mathrm{A'DP} = \theta$ とし，正方形 ABCD の面積を S_1，三角形 $\mathrm{AA'D}$ の面積を S_2，三角形 $\mathrm{A'CD}$ の面積を S_3 とする．以下の問題に答えよ．

(1) $\theta = 15^\circ$ のとき，辺 $\mathrm{AA'}$ の長さを a を用いて表せ．

(2) 辺 $\mathrm{A'P}$ と辺 $\mathrm{A'D}$ の長さの和が $\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$ であるとき，面積比 $\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．

(3) $\tan\theta = \sqrt{2} - 1$ であるとき，面積比 $\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．

(4) 面積比 $\dfrac{S_2}{S_3}$ を $\tan\theta$ を用いて表せ．

(5) $k = \dfrac{S_2}{S_3}$ とおく．辺の長さの比 $\dfrac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{AA'}}$ を k を用いて表せ．

問題４　(配点 50 点)

自然数 l, m, n に対して，集合 $A(l,m,n)$ を

$$A(l,m,n) = \{2^a 3^b 6^{-c} \mid 1 \leqq a \leqq l, 1 \leqq b \leqq m, 1 \leqq c \leqq n,\ a,b,c \text{ は自然数}\}$$

で定める．例えば，

$$A(1,1,1) = \{1\}, \qquad A(2,2,1) = \{1,2,3,6\},$$
$$A(2,1,2) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 1, 2\right\}, \quad A(2,2,2) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 6\right\}$$

となり，$A(2,2,2)$ に含まれる要素の数は 7 となる．以下の問題に答えよ．

(1) 集合 $A(l,m,1)$ に含まれる要素の数を求めよ．

(2) 集合 $A(10,11,1)$ の中から無作為に 1 つの要素を選んだとき，それが 6 の倍数である確率を求めよ．

(3) 集合 $A(3,4,3)$ に含まれる要素の数を求めよ．

(4) 集合 $A(3,4,5)$ に含まれる要素の数を求めよ．

1 から 6 の目があるさいころを投げ，出た目を d とし，集合 $A(3,4,d)$ から無作為に 1 つの要素を取り出す操作を行う．

(5) 取り出した要素が自然数である確率を求めよ．

(6) 取り出した要素が自然数であるとき，さいころの目 d が 5 である確率を求めよ．